

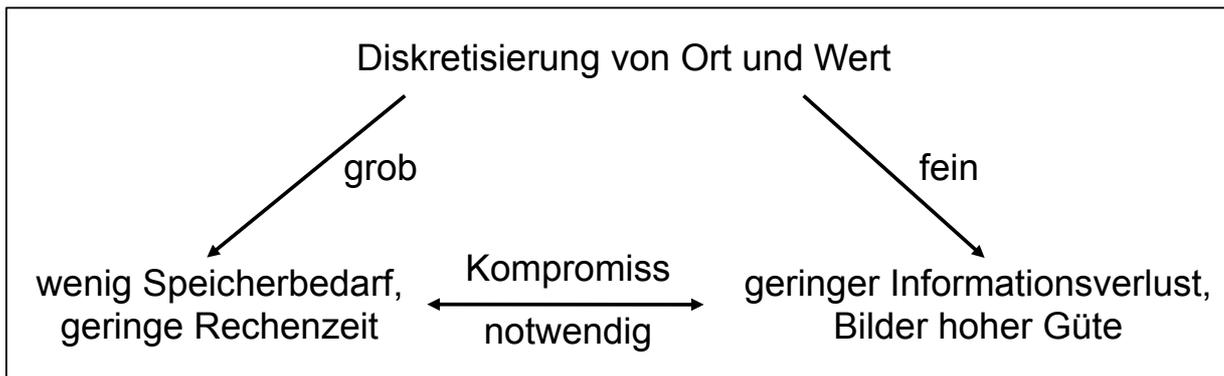
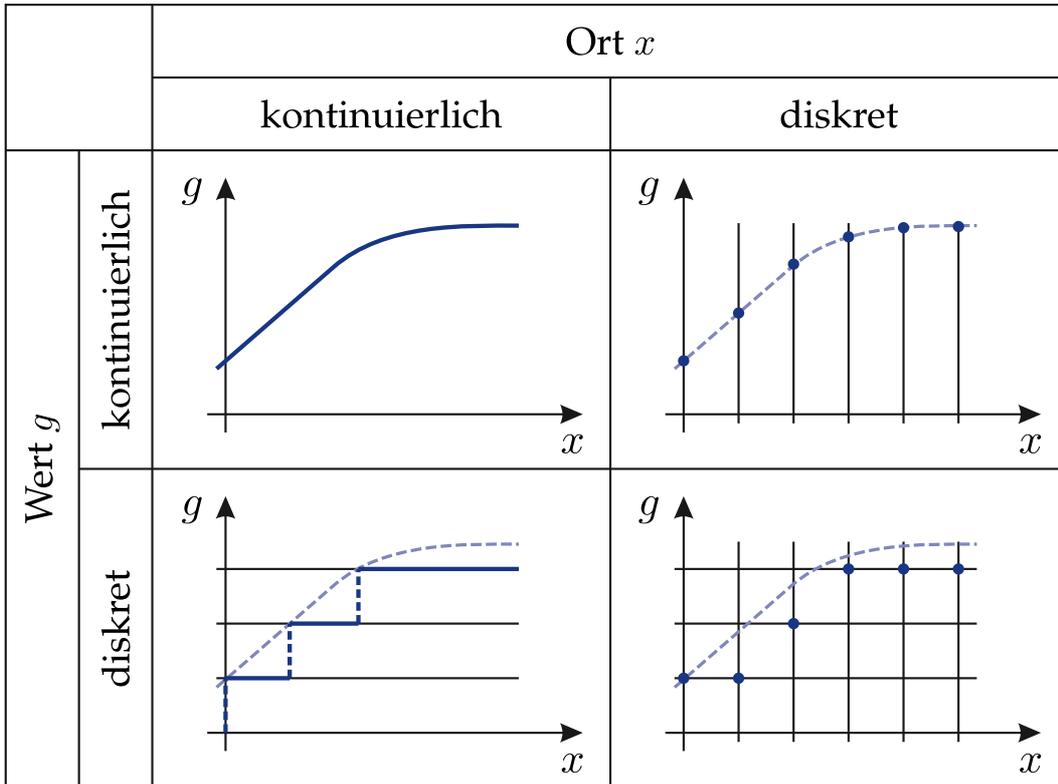
8. Bildsignale

8.1 Mathematische Beschreibung von Bildsignalen

Speicherung + Verarbeitung im Digitalrechner erfordern:

- Diskretisierung der Werte g
- Diskretisierung der Orte x
- endliche Beschränkung des Ortsbereiches
- endliche Beschränkung der Werte g

Vereinfachung: Betrachtung von Signalen $g(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$



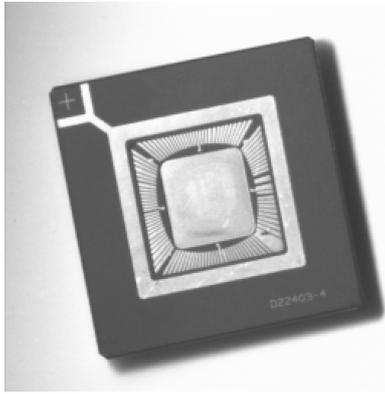
Wie grob darf man Ort und Wert diskretisieren, um wesentliche Signalinhalte nicht zu verlieren?

Qualitative, subjektive Antwort:

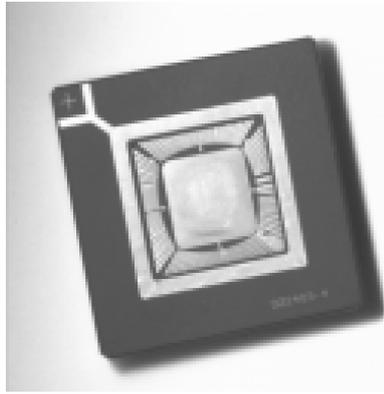
Für zufriedenstellenden visuellen Eindruck erfordern:

- detailreiche Bilder eine feine Ortsdiskretisierung
- detailarme Bilder eine feine Wertdiskretisierung (Scheinkanten)

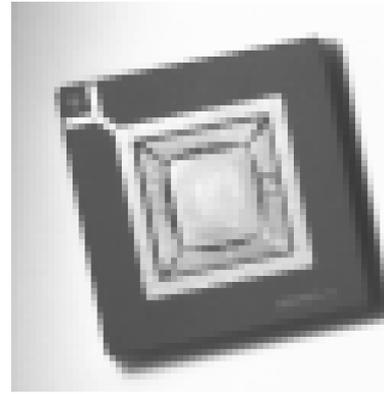
8.1 Mathematische Beschreibung von Bildsignalen



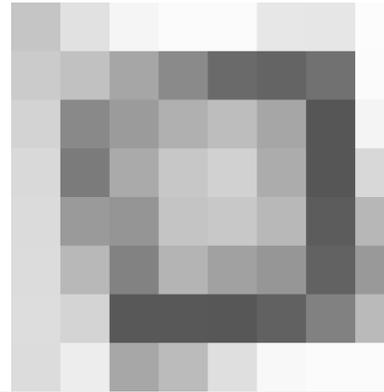
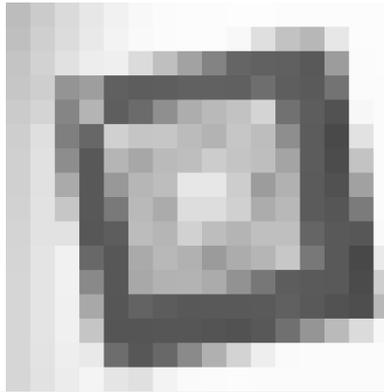
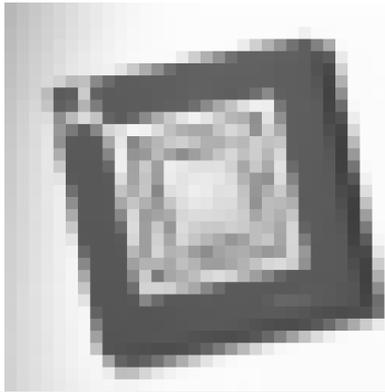
↑ 256×256 ↓ 32×32



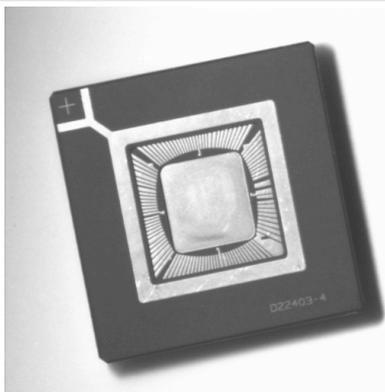
↑ 128×128 ↓ 16×16



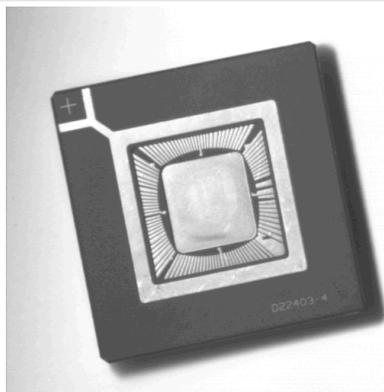
↑ 64×64 ↓ 8×8



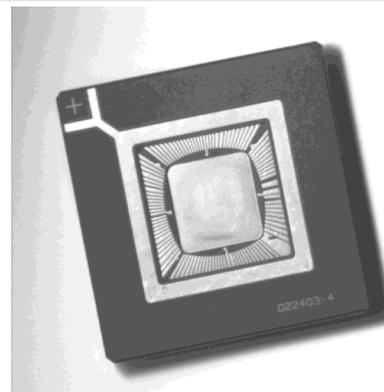
8.1 Mathematische Beschreibung von Bildsignalen



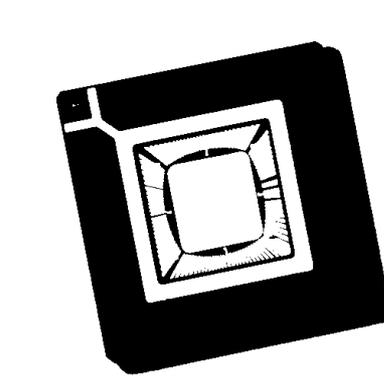
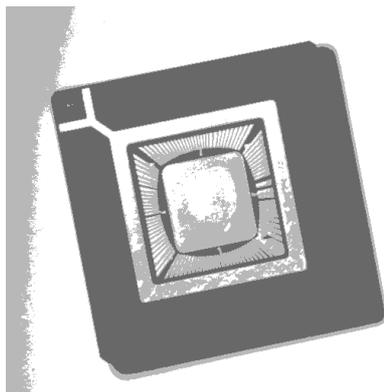
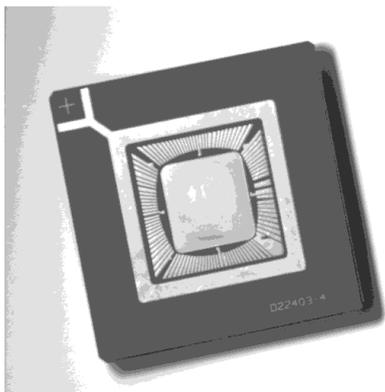
↑ 64 Werte ↓ 8 Werte



↑ 32 Werte ↓ 4 Werte



↑ 16 Werte ↓ 2 Werte



8.3.1 Definition (eindimensional)

■ Hintransformation:

$$G(f) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi f x} dx =: \mathcal{F}\{g(x)\} \quad (*)$$

■ Rücktransformation:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f x} df = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} \quad (**)$$

$$g(x), G(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Hinreichende Existenzbedingung von (*): $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$ $g(x)$ absolut integrierbar

f ist die mit x korrespondierende **Ortsfrequenz**, $[f] = [x]^{-1}$

($\omega = 2\pi f$: zugehörige Kreisfrequenz)

8.3 Die Fourier-Transformation

Bedeutung von (**): $g(x)$ wird aus **überabzählbar unendlich vielen komplexen harmonischen Schwingungen**, die mit $G(f)$ gewichtet werden, additiv synthetisiert

Qualitative Aussage:

Feine Details von $g(x)$ \longleftrightarrow hochfrequente Anteile von $G(f)$

Langsam mit x veränderliche Anteile von $g(x)$ \longleftrightarrow niederfrequente Anteile von $G(f)$

Die Fourier-Transformation ist eine **globale** Transformation.
Für jede Frequenz hängt $G(f)$ vom gesamten Verlauf von $g(x)$ ab.

$$G(\mathbf{f}) = \mathcal{F}\{g(\mathbf{x})\} := \iint_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) e^{-j2\pi\mathbf{f}^T\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) e^{-j2\pi f_x x} dx \right) e^{-j2\pi f_y y} dy$$

Separabilität

$\mathbf{x} = (x, y)^T, \quad \mathbf{f} = (f_x, f_y)^T$

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\mathbf{f})\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{f}) e^{j2\pi\mathbf{f}^T\mathbf{x}} d\mathbf{f}$$

vektorielle Formulierung gilt auch im N -dimensionalen Fall

Eigenschaften der 2D-Fourier-Transformation

■ **Separationssatz:**

$$g(\mathbf{x}) = g_1(x) \cdot g_2(y) \iff G_1(f_x) \cdot G_2(f_y)$$

Jeder Faktor wird für sich eindimensional transformiert

Bsp.: $g(\mathbf{x}) = \delta(x) \cos(2\pi f_{y_0} y) \iff 1(f_x) \frac{1}{2} (\delta(f_y + f_{y_0}) + \delta(f_y - f_{y_0}))$

■ **Lineare Koordinatentransformation:**

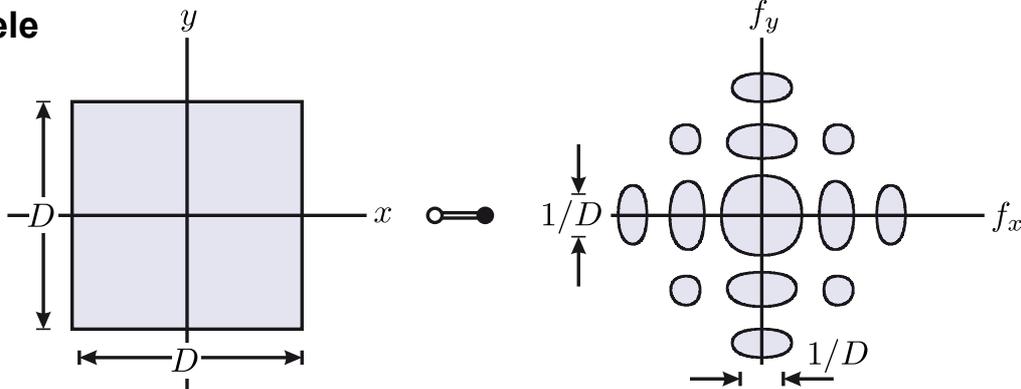
Korrelat der eindimensionalen (Orts-)Skalierung im Mehrdimensionalen

$$\xi = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0$$

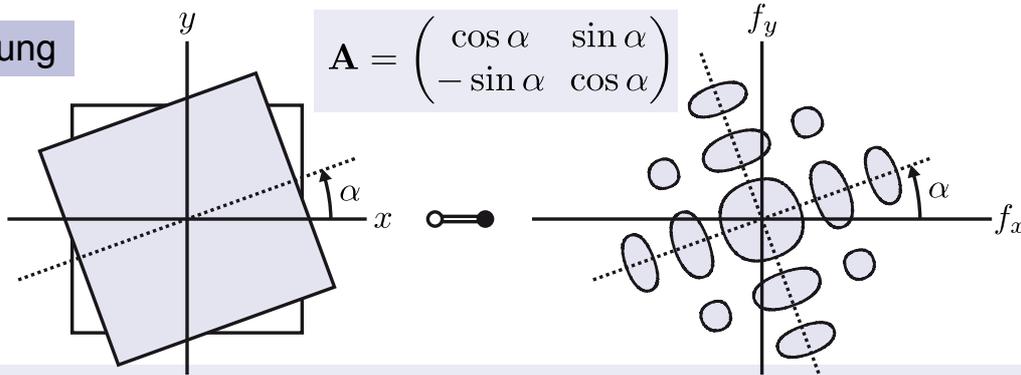
A : nichtsinguläre 2x2-Matrix

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(\mathbf{A}\mathbf{x})\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{A}\mathbf{x}) e^{-j2\pi\mathbf{f}^T\mathbf{x}} d\mathbf{x} && d\xi = |\det \mathbf{A}| \cdot d\mathbf{x} \\ &= |\det \mathbf{A}|^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-j2\pi((\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{f})^T\xi} d\xi \\ &= |\det \mathbf{A}|^{-1} G((\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{f}) \end{aligned}$$

Beispiele

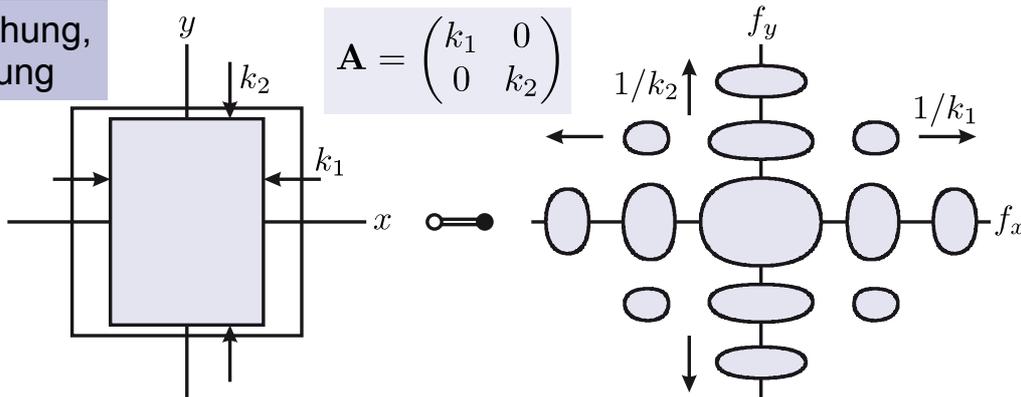


Drehung

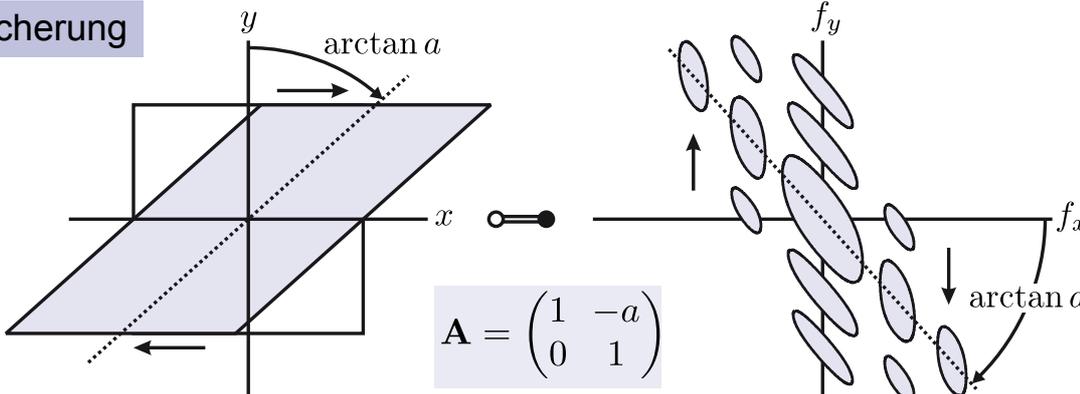


⇒ rotationssymmetrische Signale haben rotationssymmetrische Spektren

Stauchung, Dehnung



Scherung



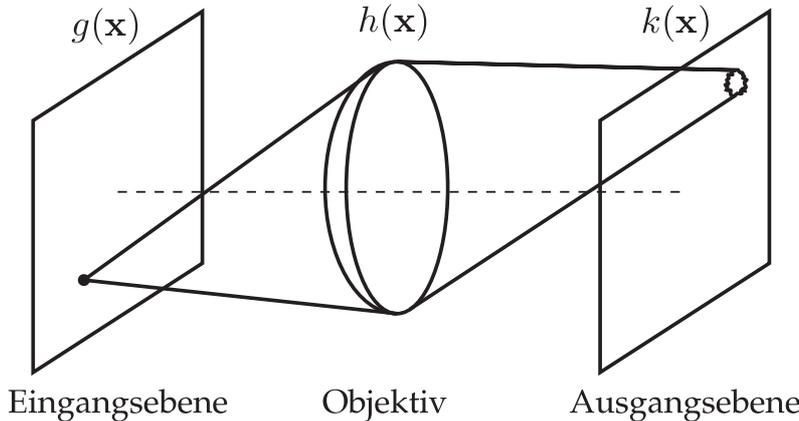
Faltungssatz:

$$k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) ** h(\mathbf{x}) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

↳

$$K(\mathbf{f}) = G(\mathbf{f}) \cdot H(\mathbf{f})$$

Bsp.: Abbildung mit einer Linse \approx **LSI-System** (linear verschiebungsinvariant)



Systemtheoretische Beschreibung des Abbildungsvorganges

$h(\mathbf{x}) =$ Impulsantwort = Antwort des Abbildungssystems auf $\delta(\mathbf{x})$



„**Punktverschmierungsfunktion**“ (PSF)

→ Definition

$H(\mathbf{f}) =$ Übertragungsfunktion des Abbildungssystems

„**optische Übertragungsfunktion**“ (OTF)

■ Diese Beschreibung umfasst auch den Fall der unscharfen Abbildung:

$$h(\mathbf{x}) = k \operatorname{rect}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\varepsilon}\right)$$

↳

$$H(\mathbf{f}) = k \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{J_1(\pi\varepsilon\|\mathbf{f}\|)}{\|\mathbf{f}\|}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

„Messerfunktion“:

$$\delta(y) = \delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_y) = 1(x) \delta(y) \iff \delta(f_x) 1(f_y) = \delta(f_x) = \delta(\mathbf{f}^T \mathbf{e}_x)$$

■ Anschaulich:
$$\delta(y) = \begin{cases} \infty & \text{für } y = 0, \text{ d. h. auf der } x\text{-Achse} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

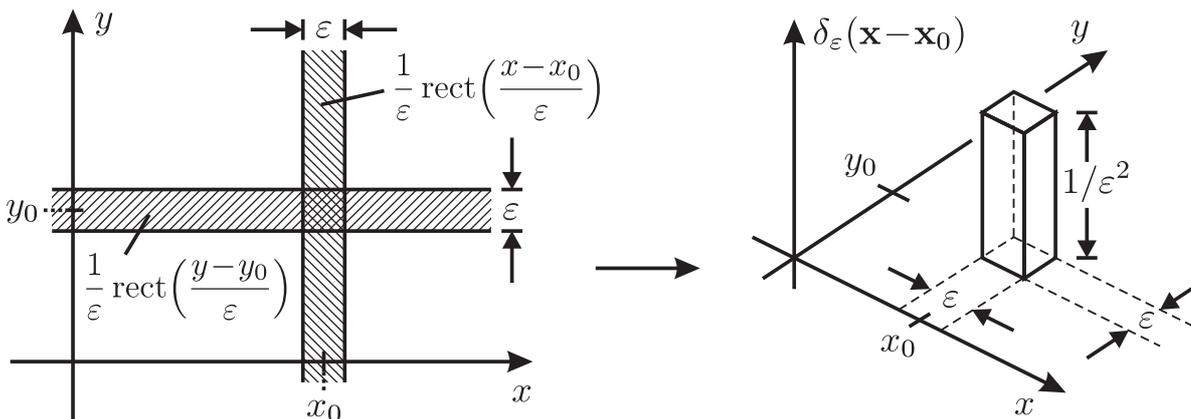
Zweidimensionaler δ -Impuls:

■ Definition:
$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = g(\mathbf{x}_0) \quad g(\mathbf{x}) \text{ stetig in } \mathbf{x}_0$$

■ Approximation:

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\varepsilon^2} \text{rect}\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \text{rect}\left(\frac{y - y_0}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Produkt der Approximationen $\delta_\varepsilon(x)$ und $\delta_\varepsilon(y)$



■ Es gilt:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x) \delta(y) \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

$$g(\mathbf{x}) ** \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

■ Anschaulich:

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \infty & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mathematische Beschreibung

- Multiplikation des Bildes $g(\mathbf{x})$ mit einer 2D-Impulsfolge (Abtastraster) $r(\mathbf{x})$:

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - m\Delta x \mathbf{e}_x - n\Delta y \mathbf{e}_y) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \right]$$

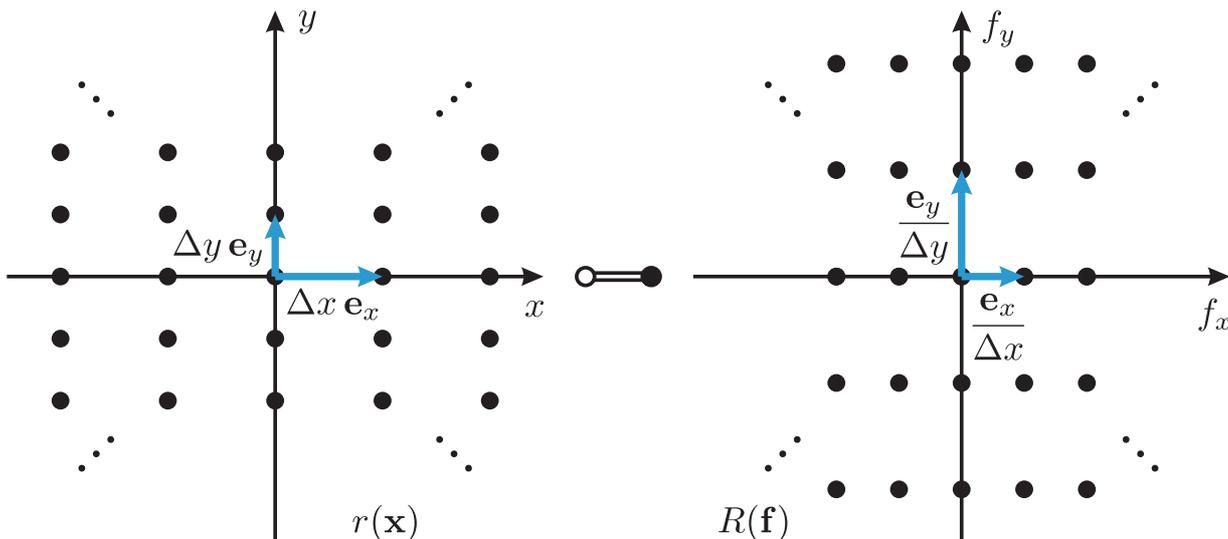


Separationssatz: jeden der beiden Faktoren eindimensional Fourier-transformieren

$$R(\mathbf{f}) = \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_x - \frac{k}{\Delta x}\right) \right] \left[\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_y - \frac{l}{\Delta y}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mathbf{f} - \frac{k}{\Delta x} \mathbf{e}_x - \frac{l}{\Delta y} \mathbf{e}_y\right)$$

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale



- Abtastraster sind durch die „Gittervektoren“ $\Delta x \mathbf{e}_x$ und $\Delta y \mathbf{e}_y$ (oder durch $\mathbf{e}_x / \Delta x$, $\mathbf{e}_y / \Delta y$) eindeutig festgelegt
- Bis auf eine Translation lässt sich jedes regelmäßige Abtastraster durch lin. Koordinatentransformation aus dem achsparallelen Raster erzeugen

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} \delta(\mathbf{A}\mathbf{x} - m\Delta x \mathbf{e}_x - n\Delta y \mathbf{e}_y) \propto \sum_{k,l} \delta\left((\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{f} - k \frac{\mathbf{e}_x}{\Delta x} - l \frac{\mathbf{e}_y}{\Delta y}\right)$$

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Im Folgenden interessieren nur noch die Lokationen der δ -Impulse. Vorfaktoren werden unterdrückt.

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} \delta(\mathbf{A}(\mathbf{x} - m \underbrace{\Delta x \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_x}_{=: \mathbf{b}_1} - n \underbrace{\Delta y \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_y}_{=: \mathbf{b}_2})) = \sum_{k,l} \delta\left((\mathbf{A}^{-1})^T (\mathbf{f} - k \underbrace{\mathbf{A} \frac{\mathbf{e}_x}{\Delta x}}_{=: \mathbf{w}_1} - l \underbrace{\mathbf{A} \frac{\mathbf{e}_y}{\Delta y}}_{=: \mathbf{w}_2})\right)$$

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) \propto \sum_{m,n} \delta(\mathbf{x} - m \mathbf{b}_1 - n \mathbf{b}_2)$$

$$\tilde{R}(\mathbf{f}) \propto \sum_{k,l} \delta(\mathbf{f} - k \mathbf{w}_1 - l \mathbf{w}_2)$$

Gittervektoren im Ortsbereich

Gittervektoren im Frequenzbereich

Es gilt:

$$\mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_1 = \Delta x \mathbf{e}_x^T \underbrace{(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T}_{\mathbf{I} : \text{Einheitsmatrix}} \frac{\mathbf{e}_x}{\Delta x} = 1 \quad \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_2 = \Delta x \mathbf{e}_x^T \underbrace{(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T}_{\mathbf{I}} \frac{\mathbf{e}_y}{\Delta y} = 0$$

$$\mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_2 = 1 \quad \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_1 = 0$$

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)^T (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^T (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \end{pmatrix}^{-1}$$

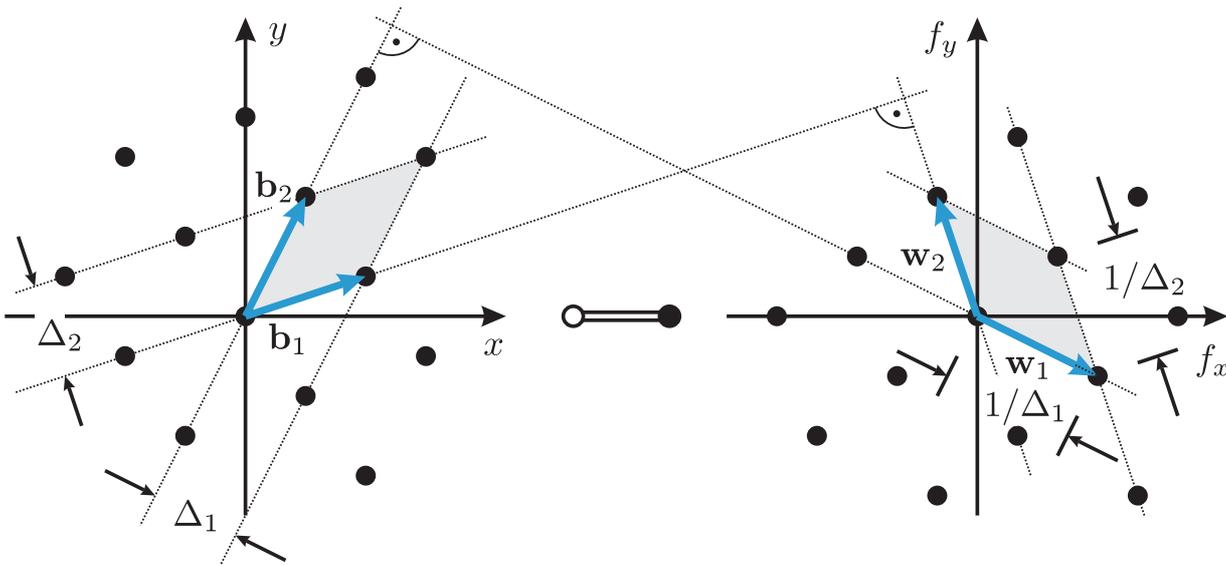
Mit diesen Gleichungen kann aus einem Abtastraster das andere berechnet werden.

Reziprozität:

$$\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)}$$

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

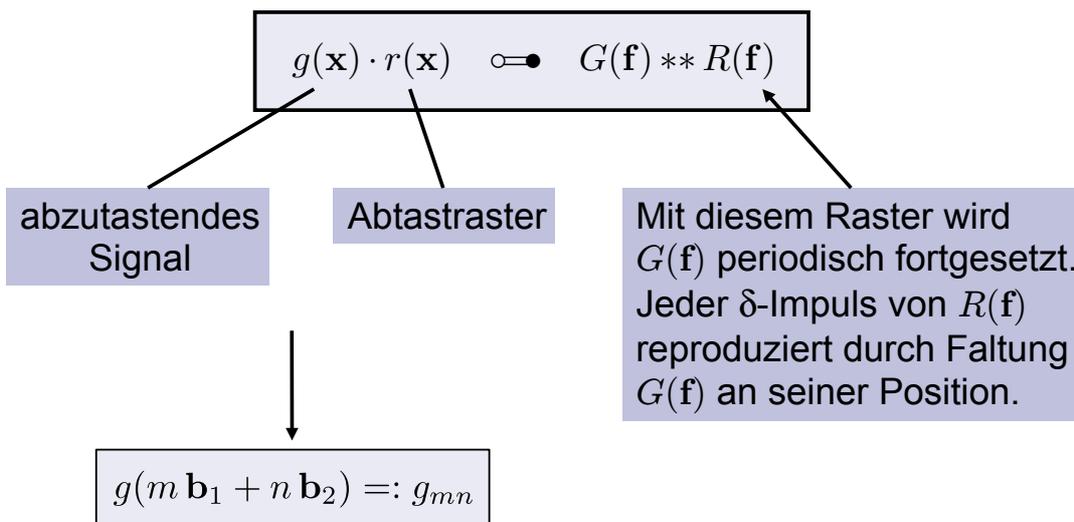
- Die Fläche des durch $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ aufgespannten Parallelogramms ist reziprok zur Fläche des durch $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ aufgespannten Parallelogramms.



Basisvektoren zur Beschreibung eines schiefwinkligen Abtastrasters und seines Spektrums

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

Abtastung:



- Sei $g(\mathbf{x})$ bandbegrenzt, d. h. es gibt ein beschränktes Gebiet $\Omega_G \subset \mathbb{R}^2$, so dass gilt: $G(\mathbf{f}) = 0$ für $\mathbf{f} \notin \Omega_G$. Das Signal $g(\mathbf{x})$ kann aus seinen auf einem regelmäßigen Abtastraster gewonnenen Abtastwerten g_{mn} **fehlerfrei** rekonstruiert werden, wenn bei der periodischen Fortsetzung keine Überlappungen entstehen.

- Ein **Interpolationsfilter** zur Rekonstruktion:

$$i_{\Omega_G}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{I_{\Omega_G}(\mathbf{f})\} \quad I_{\Omega_G}(\mathbf{f}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{f} \in \Omega_G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abtastung:

$$g(\mathbf{x}) r(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} g(m \mathbf{b}_1 + n \mathbf{b}_2) \delta(\mathbf{x} - m \mathbf{b}_1 - n \mathbf{b}_2) \iff \propto \sum_{k,l} G(\mathbf{f} - k \mathbf{w}_1 - l \mathbf{w}_2)$$

Rekonstruktion:

$$\downarrow ** i_{\Omega_G}(\mathbf{x}) \iff \downarrow \cdot I_{\Omega_G}(\mathbf{f})$$

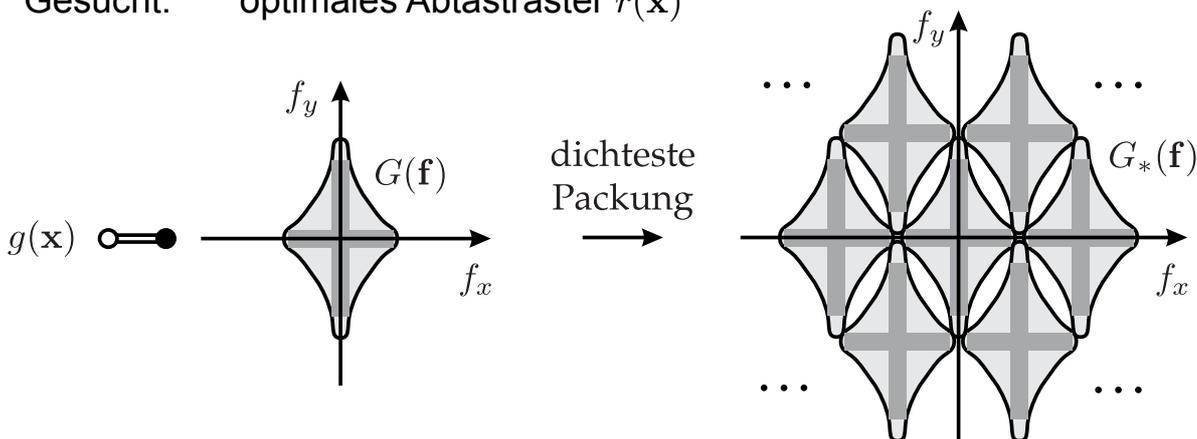
$$g(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} g_{mn} i_{\Omega_G}(\mathbf{x} - m \mathbf{b}_1 - n \mathbf{b}_2) \iff G(\mathbf{f})$$

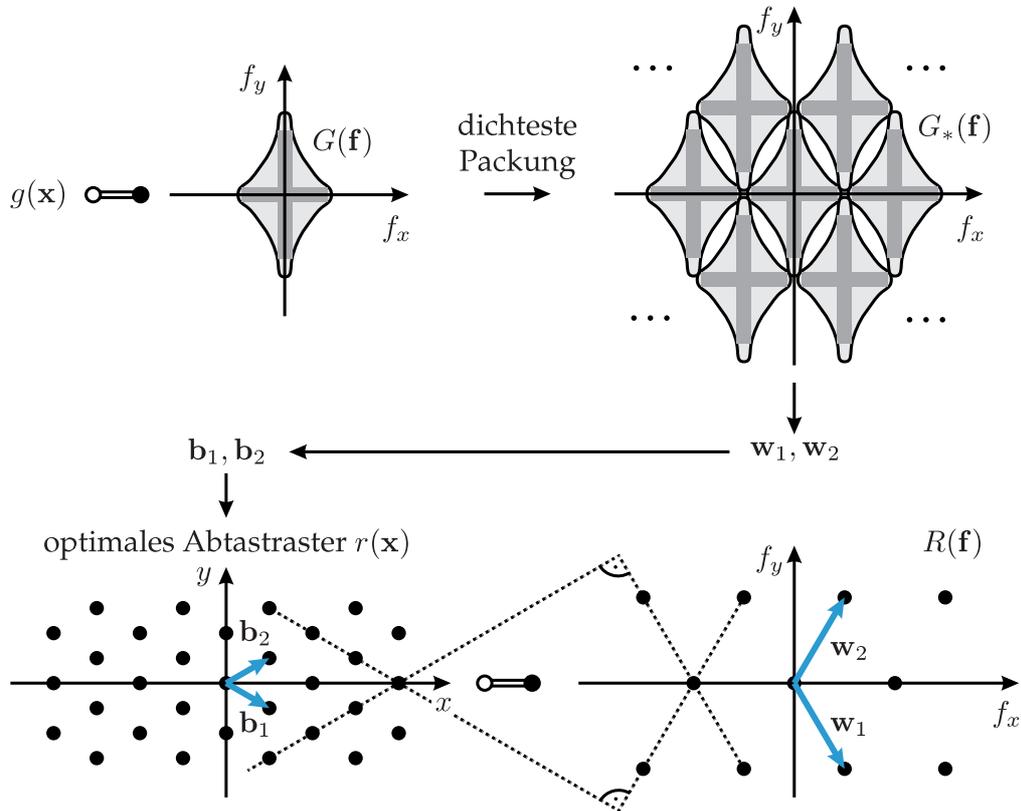
Optimale Abtastung

- Dichteste Packung der Spektren $G(\mathbf{f} - m \mathbf{w}_1 - n \mathbf{w}_2)$ im Frequenzbereich entspricht der größten zulässigen Abtastung von $g(\mathbf{x})$ im Ortsbereich

Beispiel: Optimale Abtastung

- Gegeben: $g(\mathbf{x})$
- Gesucht: optimales Abtastraster $r(\mathbf{x})$





8.3.8 Die zweidimensionale DFT

Definition:

$$G_{kl} := \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} e^{-j2\pi \frac{nl}{N}} \right) e^{-j2\pi \frac{mk}{M}} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} e^{-j2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$

$$g_{mn} = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{kl} e^{j2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$

- 2D-DFT setzt implizit g_{mn} und G_{kl} in beide Koordinatenrichtungen **periodisch** fort

- Zusammenhang \mathbf{x} , \mathbf{f} mit Indizes m, n, k, l :

$$\mathbf{x} = (m \Delta x, n \Delta y)^T \qquad \mathbf{f} = \left(\frac{k}{M \Delta x}, \frac{l}{N \Delta y} \right)^T$$

8.3.8 Die zweidimensionale DFT

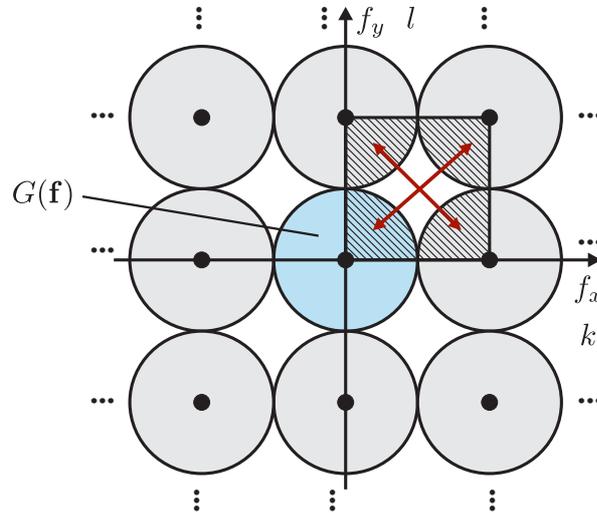
- Berechnung: zeilen- und anschließend spaltenweise 1D-DFT oder umgekehrt!

Aufwand:

- direkte Berechnung: $M^2 N^2$ komplexe Multiplikationen und Additionen
- mit 1D-FFT: $M N (\log_2 M + \log_2 N)$ kompl. Mult. und Additionen

„Fenster“ der DFT

- periodische Fortsetzung des Spektrums G_{kl}
- „Fenster“ (DFT-Ausschnitt): ungewohnte Anordnung der Frequenzen
- gewohnte Anordnung durch Überkreuzvertauschung der vier Quadranten des DFT-Fensters
- gleicher Sachverhalt gilt auch im Ortsbereich!



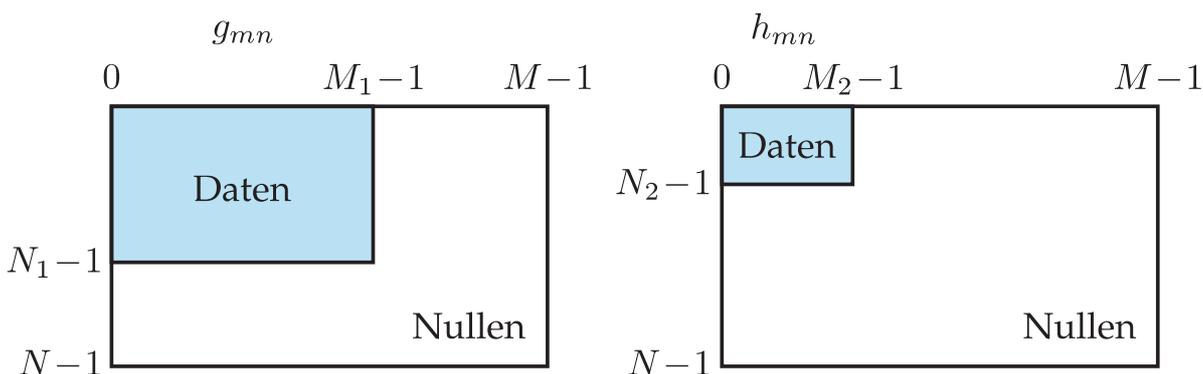
8.3.8 Die zweidimensionale DFT

Faltungstheorem:

$$\text{DFT}^{-1}\{G_{kl} \cdot H_{kl}\} = g_{mn} ** h_{mn} = \sum_{\mu=0}^{M-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} g_{\mu,\nu} h_{(m-\mu) \bmod M, (n-\nu) \bmod N}$$

zyklische Faltung

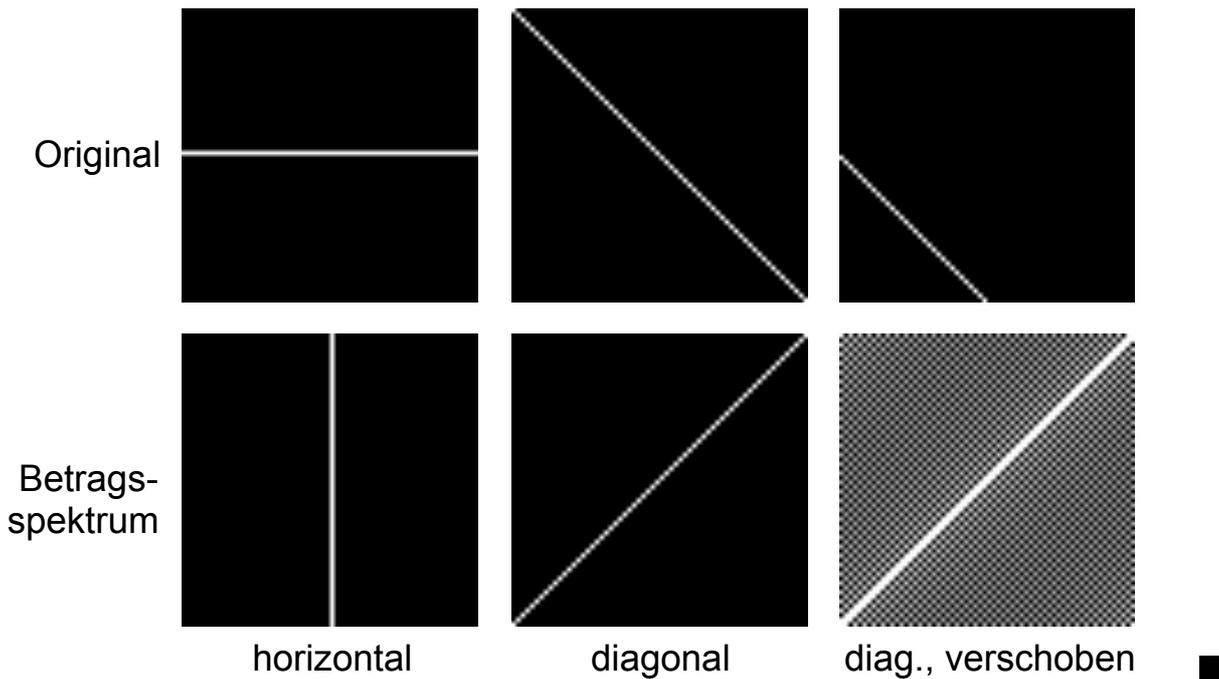
- Vermeidung des Randeffektes durch *zero padding* in beiden Dimensionen



8.3.8 Die zweidimensionale DFT

Beispiel 8.15/8.16: DFT einer horizontalen bzw. diagonalen Linie

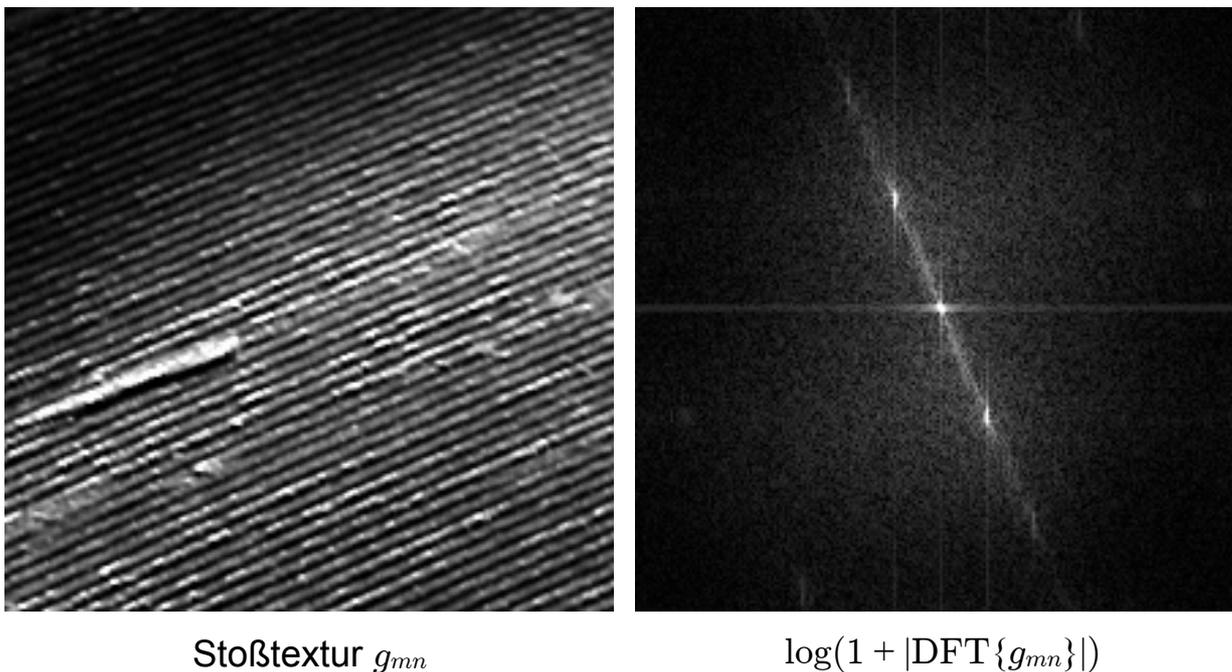
- Spektren sind Dirac-Geraden senkrecht zur ursprünglichen Linie



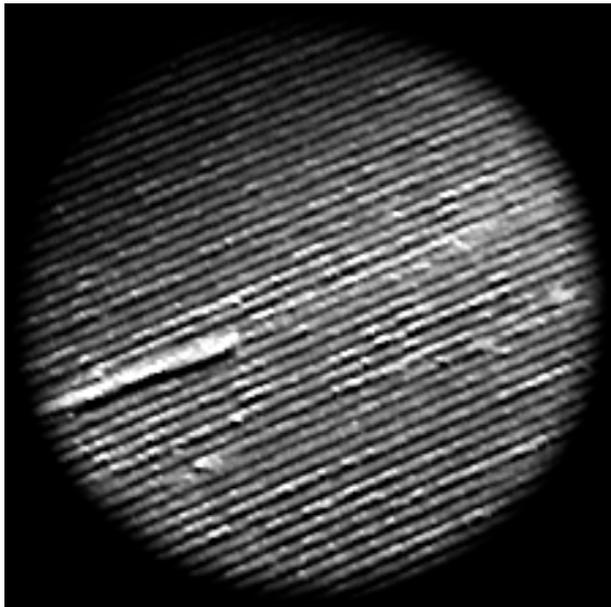
8.3.8 Die zweidimensionale DFT

Beispiel 8.17: DFT einer periodischen Riefentextur

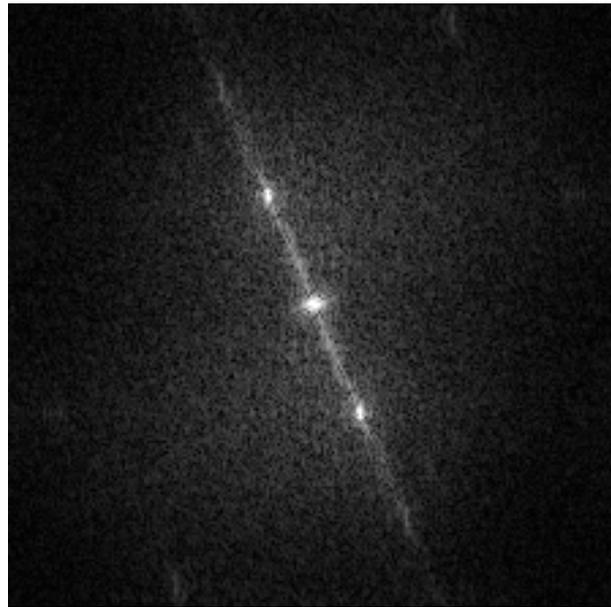
- Leckeffekt ist deutlich zu sehen



- Verringerung des Leckeffekts durch Multiplikation mit Hann-Fenster



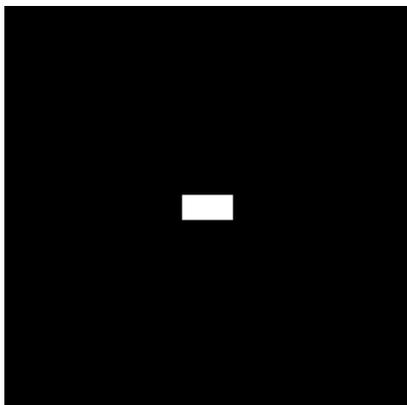
$g_{mn} \cdot w_{mn}$



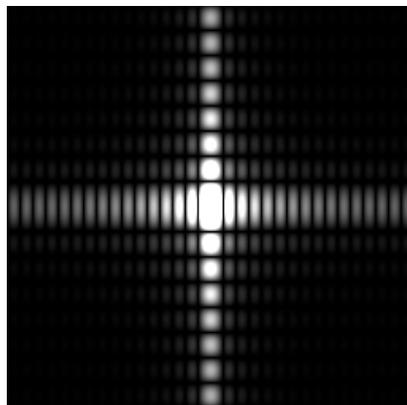
$\log(1 + |\text{DFT}\{g_{mn} \cdot w_{mn}\}|)$

Beispiel 8.18: DFT eines Rechtecks

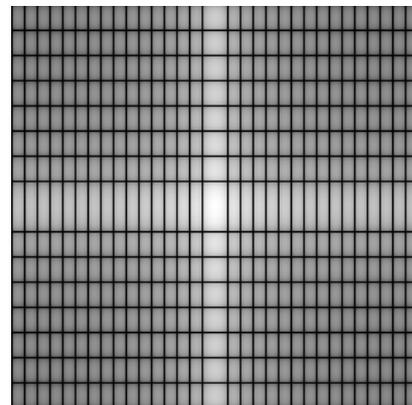
- Signal entspricht Produkt zweier Rechteckfunktionen
- Spektrum entspricht Produkt zweier Sinc-Funktionen



g_{mn}



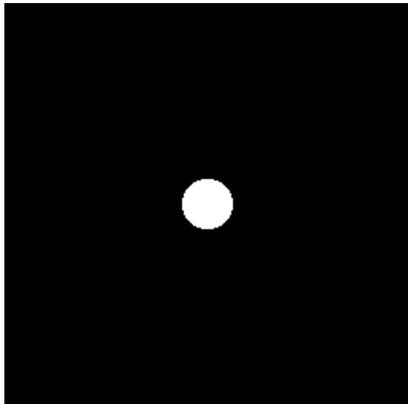
$|\text{DFT}\{g_{mn}\}|$



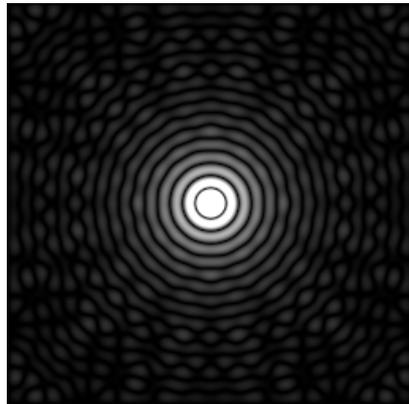
$\log(1 + |\text{DFT}\{g_{mn}\}|)$

Beispiel 8.19: DFT einer Kreisscheibe

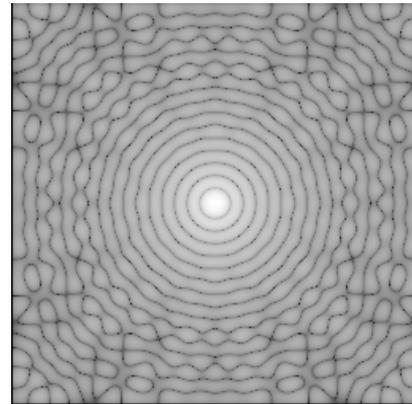
- Wegen der Ortsdiskretisierung bilden Nullstellen keine perfekten konzentrischen Kreise mehr



g_{mn}



$|\text{DFT}\{g_{mn}\}|$

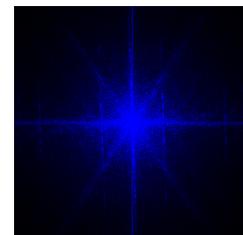
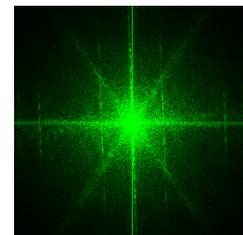
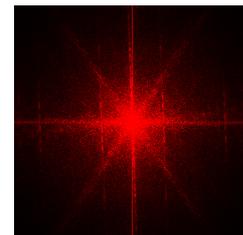
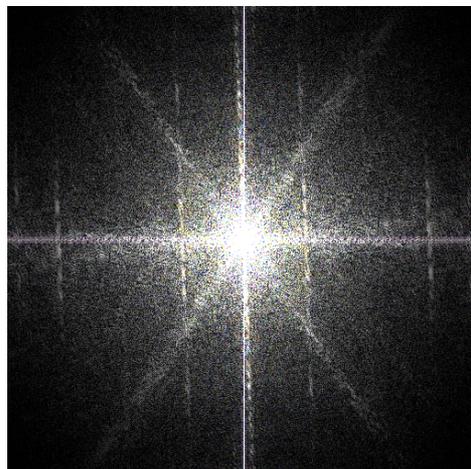


$\log(1 + |\text{DFT}\{g_{mn}\}|)$



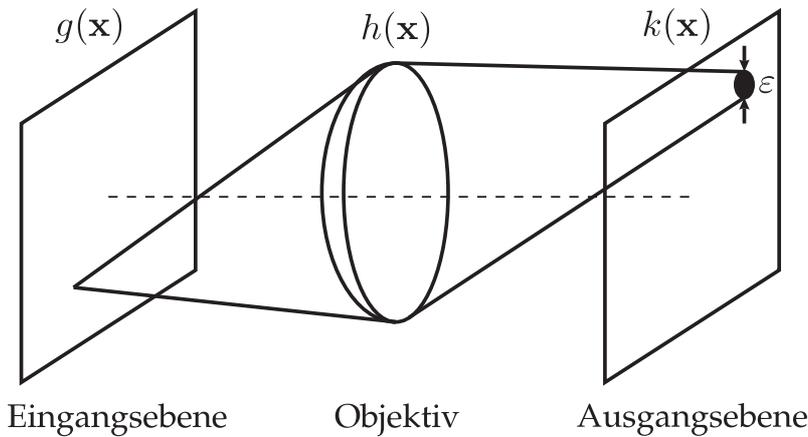
Beispiel 8.21: DFT eines Farbluftbildes

- Farbkanäle wurden getrennt einer DFT unterzogen
- Ergebnis erneut als Farbbild dargestellt



Beispiel 8.23: Unscharfe optische Abbildung

- Oberfläche sei um Δg außer Fokus
- ➔ Oberflächenpunkt \rightarrow Unschärfekreis in Bildebene, $\emptyset: \epsilon = \epsilon(\Delta g)$



Inkohärentes Licht:

- $g(\mathbf{x}), k(\mathbf{x})$ sind Intensitäten (Leistung pro Fläche)
- Intensitäten überlagern sich additiv

- Ausgangsbild:

$$g(\mathbf{x}) ** h(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad G(\mathbf{f}) H(\mathbf{f}) = K(\mathbf{f})$$

- Impulsantwort:

$$h(\mathbf{x}) \approx \frac{4}{\pi \epsilon^2} \text{rect}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\epsilon}\right) \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \iint_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1$$

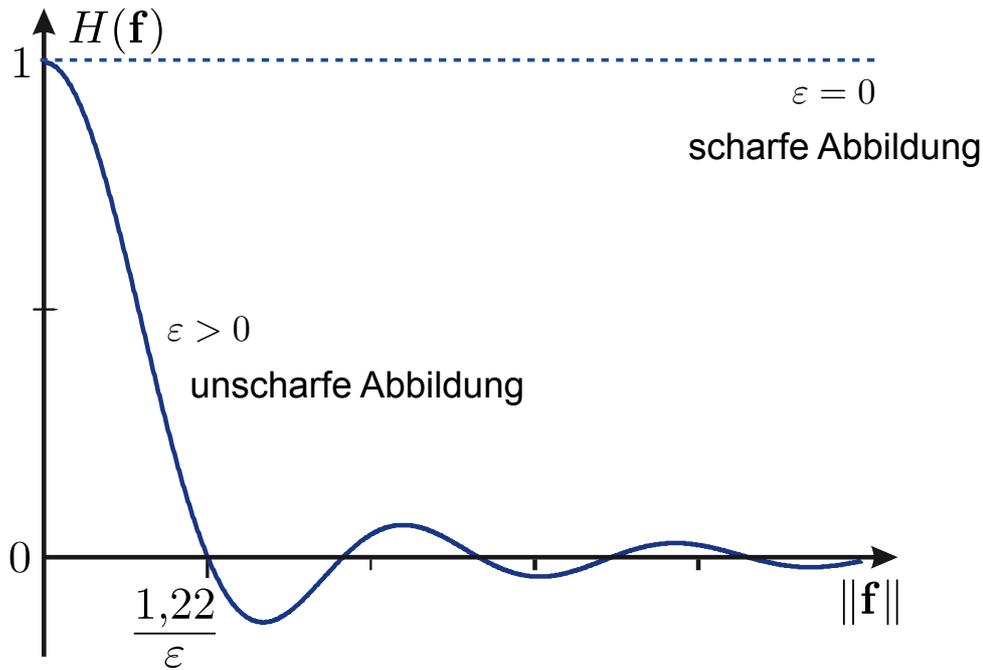
positiv, verlustfrei

- Übertragungsfunktion:

$$H(\mathbf{f}) = \frac{2}{\pi \epsilon} \cdot \frac{J_1(\pi \epsilon \|\mathbf{f}\|)}{\|\mathbf{f}\|} \quad \text{rotationssymmetrisch}$$

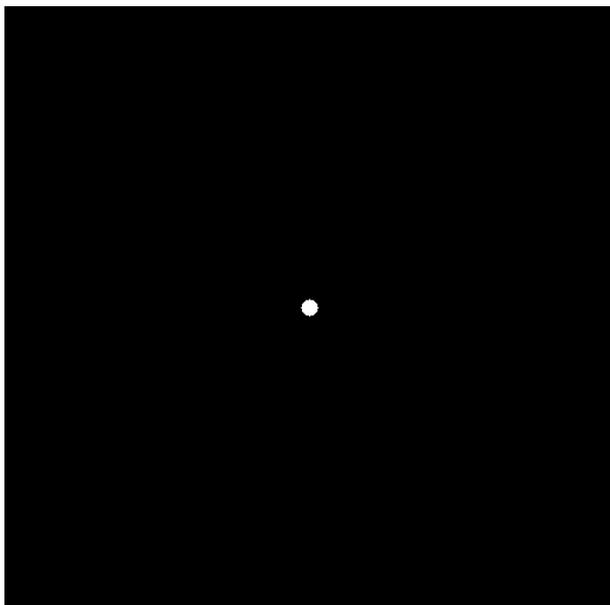
$J_1(\cdot)$: Bessel-Funktion 1. Art, 1. Ordnung

Unscharfe optische Abbildung hat Tiefpasscharakter
 ➔ kann z. B. als Anti-Aliasing-Filter verwendet werden

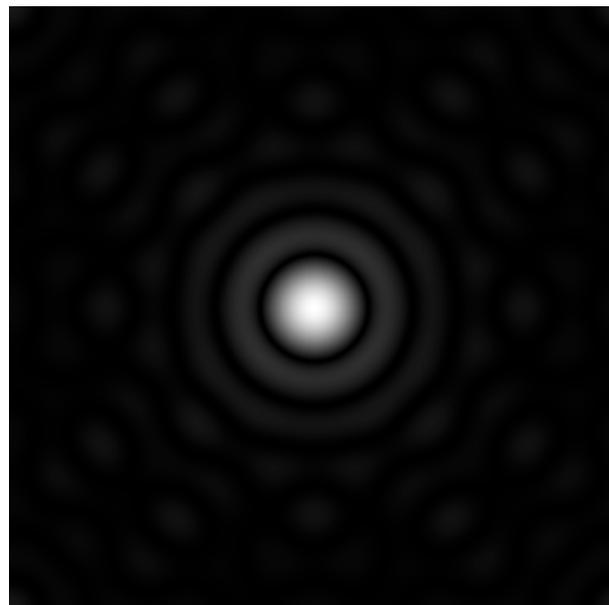


Übertragungsverhalten der optischen Abbildung

Unscharfe optische Abbildung: Unscharfe Abbildung eines Punktes

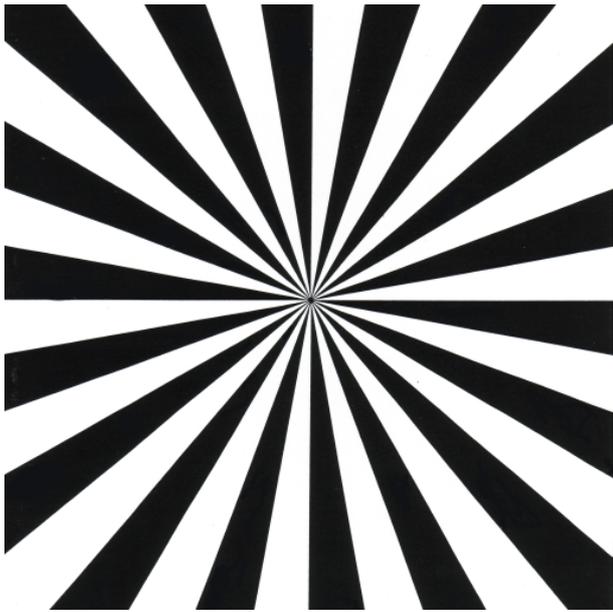


Unschärfescheibchen

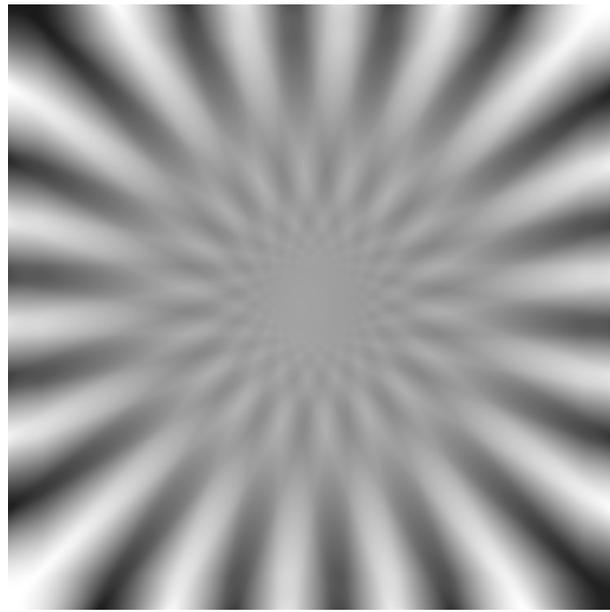


DFT-Betragspektrum

Unschärfe optische Abbildung: Auswirkung der negativen Werte von $H(f)$

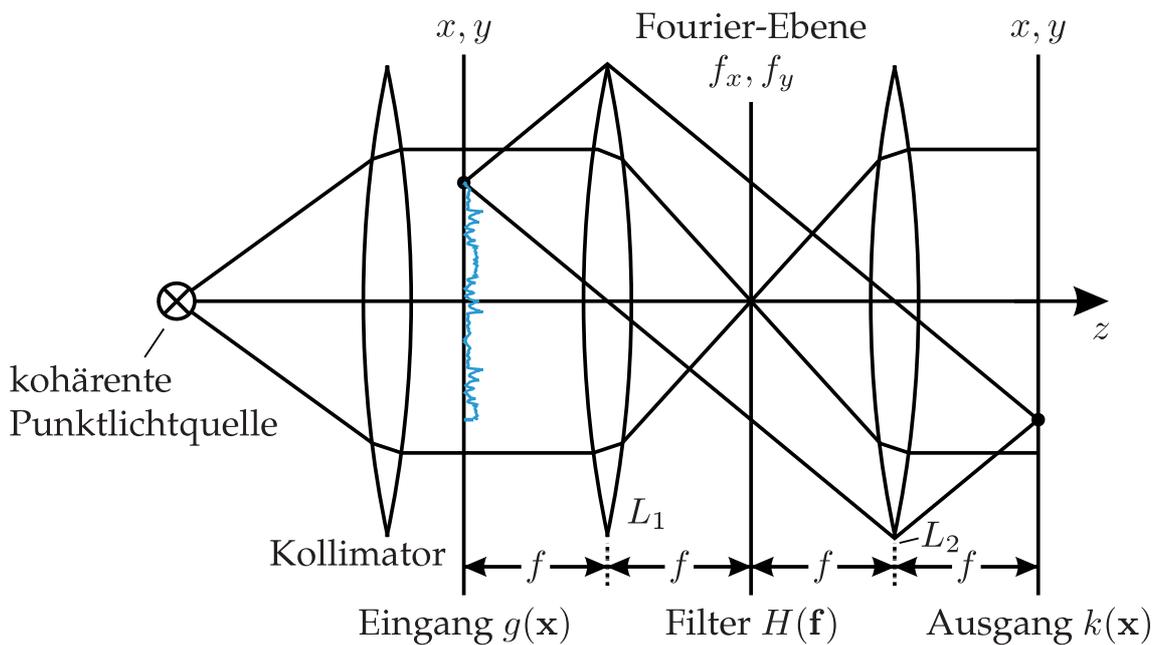


Siemens-Stern



Unschärfe Abbildung (simuliert)

Beispiel 8.24: Kohärent-optische Bildfilterung



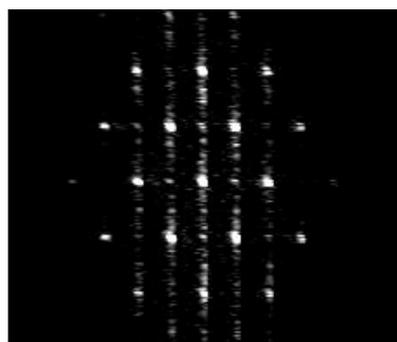
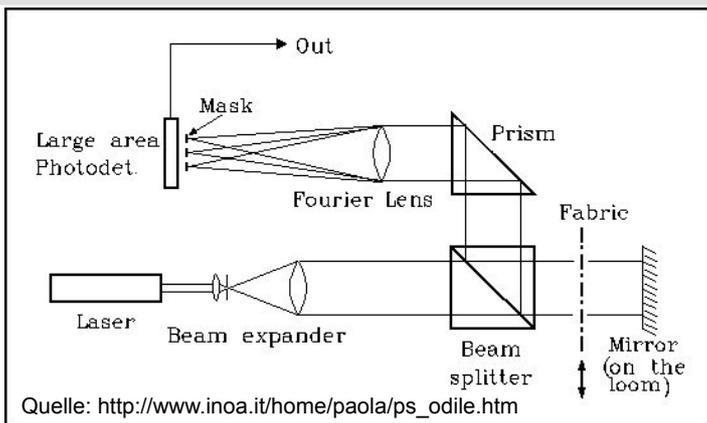
$g(\mathbf{x}), k(\mathbf{x})$: elektrische Felder

$$\left. \begin{array}{l}
 L_1 : \boxed{g(\mathbf{x}) \rightarrow G(\mathbf{f})} \\
 L_2 : \boxed{G(\mathbf{f}) \cdot H(\mathbf{f}) = K(\mathbf{f}) \rightarrow k(\mathbf{x})}
 \end{array} \right\} \text{Filterung in Echtzeit}$$

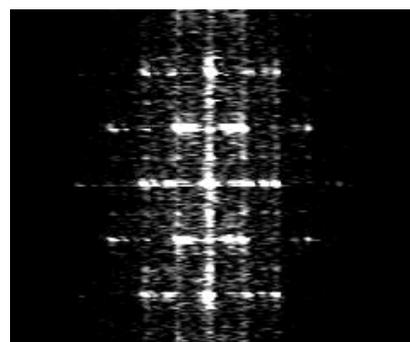
■ optische Realisierung der 2D kontinuierlichen Fourier-Transformation

Zur Plausibilität:

- (1) $g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$: Lichtpunkt im Fokus von L_1
 → Fourier-Ebene konstant beleuchtet: $G(\mathbf{f}) \equiv 1$
- (2) $g(\mathbf{x}) \equiv c$: gleichmäßige Helligkeit
 → parallele Strahlen der Beleuchtung werden von L_1 fokussiert: $G(\mathbf{f}) = c \delta(\mathbf{f})$



OFT: defektfreie Textur



OFT: defekte Textur

Karhunen-Loève-Transformation (Hauptachsentransformation)

- Kanäle von Bildserien, Multispektralbildern, RGB-Bildern i.d.R. korreliert:
 \mathbf{g} : **vektorwertiges Bild**



Ziele

- Dekorrelation
- Fusion
- Kompression

Bildintensitäten werden durch den Zufallsvektor \mathbf{g} beschrieben

- Mittelwert des Wertevektors:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}} = \mathbb{E}\{\mathbf{g}\}$$

- Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} = \mathbb{E}\{(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})^T\}$$

\mathbf{e}_i : Eigenvektoren der Kovarianzmatrix, $i = 1, \dots, Q$

λ_i : Eigenwerte mit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$

\mathbf{A} : Matrix mit \mathbf{e}_i als Zeilenvektoren, Anordnung in absteigender Reihenfolge der Eigenwerte

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_Q)^T$$

- Karhunen-Loève-Transformation:

$$\mathbf{k} = \mathcal{K}\{\mathbf{g}\} = \mathbf{A}(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})$$

(Hauptachsen-, Hotelling-Transformation, *Principal Components Analysis*)

Vorgehensweise:

- Schätzung der Kovarianzmatrix, ggf. durch örtliche Mittelung (Ergodenhypothese)
- Lösung des Eigenwertproblems
→ Eigenvektoren sortiert nach fallenden Eigenwerten
- Durchführung der Transformation

Bemerkung:

- Kein schneller Algorithmus für die Karhunen-Loève-Transformation

Eigenschaften

- linear
- orthogonal
- umkehrbar
- \mathbf{k} ist mittelwertfrei
- Komponenten von \mathbf{k} sind unkorreliert (bei Gauß'schen Prozessen ⇒ stochastische Unabhängigkeit)
- nicht separierbar

$$\mathcal{K}\{a \mathbf{g}_1 + b \mathbf{g}_2\} = a \cdot \mathcal{K}\{\mathbf{g}_1\} + b \cdot \mathcal{K}\{\mathbf{g}_2\}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{g} = \mathcal{K}^{-1}\{\mathbf{k}\} = \mathbf{A}^T \mathbf{k} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{k}\} = \mathbf{A} (\mathbb{E}\{\mathbf{g}\} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{k}\mathbf{k}} &= \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{A}^T \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bedeutung der λ_i : $\lambda_i = \text{Var}\{k_i\}$

- λ_i entspricht der Signalenergie, welche die Komponente k_i zum Kontrast des vektoriellen Bildes beiträgt
- Die Karhunen-Loève-Transformation ist **optimal** bezüglich des **mittleren quadratischen Darstellungsfehlers** („beste lineare Approximation“):

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}^T \mathbf{k} + \mu_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^Q \mathbf{e}_i k_i + \mu_{\mathbf{g}}$$

- Abbruch der Reihe nach ν Gliedern \rightarrow Schätzung des Vektors \mathbf{g} :

$$\hat{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{e}_i k_i + \mu_{\mathbf{g}}$$

- Darstellungsfehler: $\Delta \mathbf{g} := \mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}} \quad \mathbb{E}\{\Delta \mathbf{g}^T \Delta \mathbf{g}\} = \sum_{i=\nu+1}^Q \lambda_i$ ist minimal

Optimale Kompression der Karhunen-Loève-Transformation:

- Normierung der **Eigenwerte** $\lambda_i \rightarrow$ Interpretation als Wahrscheinlichkeit

$$\xi_i := \frac{\mathbb{E}\{k_i^2\}}{\sum_{i=1}^Q \mathbb{E}\{k_i^2\}} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^Q \lambda_i}$$

- **Entropie** H der Varianzen ist dabei **minimal**:

$$H = - \sum_{i=1}^Q \xi_i \text{ld } \xi_i$$

\Rightarrow Varianzen λ_i **maximal ungleichverteilt**

- Die Signalenergie und damit auch gewissermaßen die Information werden durch die Karhunen-Loève-Transformation maximal stark auf möglichst wenige Komponenten konzentriert

Beweis: Unkorreliertheit der Komponenten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\mathbf{k}\mathbf{k}} &= \mathbb{E}\{\mathbf{k} \mathbf{k}^T\} = \mathbb{E}\{\mathbf{A}(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})^T \mathbf{A}^T\} \\
 &= \mathbf{A} \mathbb{E}\{(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})^T\} \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{A}^T \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_Q^T \end{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_Q) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_Q^T \end{pmatrix} (\mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{e}_Q) \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_Q^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \dots, \lambda_Q \mathbf{e}_Q) \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & \lambda_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 & & \\ \lambda_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 & & \ddots & \\ & & & \lambda_Q \mathbf{e}_Q^T \mathbf{e}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_Q \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

⇒ Eigenvektormatrix \mathbf{A} bewirkt Diagonalisierung der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}}$ ■

8.7 Karhunen-Loève-Transformation

Beweis: Beste lineare Approximation

- Sei \mathbf{e} ein beliebiger Vektor mit $\|\mathbf{e}\| = 1$ und $\mathbf{k} = \mathbf{g}^T \mathbf{e}$ die Projektion von \mathbf{g} auf \mathbf{e} . Der Vektor \mathbf{g} ist nach Voraussetzung mittelwertfrei.
- Der Erwartungswert von \mathbf{k} lautet:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{k}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{g}^T \mathbf{e}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{g}^T\} \mathbf{e} = 0$$

- Für die Varianz von \mathbf{k} erhält man:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}\{\mathbf{k}\} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{k} - \mathbb{E}\{\mathbf{k}\})^2\} = \mathbb{E}\{\mathbf{k}^2\} \\
 &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}^T \mathbf{e} \cdot \mathbf{g}^T \mathbf{e}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{e}\} \\
 &= \mathbf{e}^T \mathbb{E}\{\mathbf{g} \mathbf{g}^T\} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{e}
 \end{aligned}$$

- Der letzte Ausdruck wird maximal, wenn \mathbf{e} und $\mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{e}$ linear abhängig (d. h. parallel) sind:

$$\lambda \mathbf{e} = \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{e} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mathbf{e}^T \mathbf{C}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{e}$$

- Die maximal mögliche Varianz von k ergibt sich für den größten Eigenwert λ
- Das Verfahren wird iterativ angewandt auf

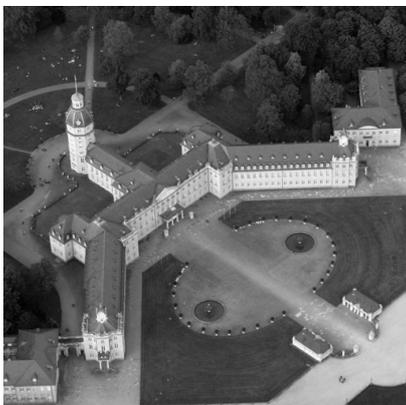
$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{g}$$

- Ergebnis: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \lambda_q$, wobei λ_i unter allen möglichen Transformationen maximal ist
- Damit ist die mittlere mittlere Energie des Darstellungsfehlers insgesamt minimal

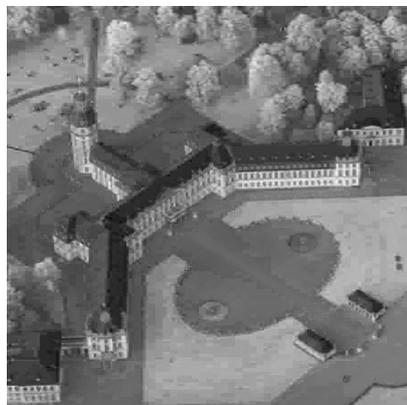


Beispiel 8.34: Dekorrelation zwischen Farbkanälen

- Karhunen-Loève-Transformation des RGB-Bildes aus Folie 34
- 1. Komponente stellt 97,1 % der Signalenergie dar; die letzte nur 0,4 %



$$\lambda_1 = 7780$$



$$\lambda_2 = 204$$



$$\lambda_3 = 30$$



Beispiel 8.35: Farbkompensation

- Für $\nu = 1$ ergibt sich ein 1D-Farbraum mit dem dominanten Farbton
- Bei $\nu = 2$ werden nur rötliche und cyanfarbene Töne vermisst



$\nu = 1$



$\nu = 2$



$\nu = 3$

Beispiel 8.36: Farbkompensation bei schwach korrelierten Kanälen

- Korrelationskoeffizienten betragen $\rho_{RG} = 0,59$, $\rho_{GB} = 0,70$ und $\rho_{RB} = 0,32$
- Für $\nu < 3$ muss man große Abstriche bei der Farbwiedergabe hinnehmen



$\nu = 1$

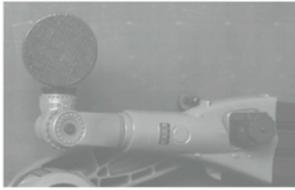


$\nu = 2$

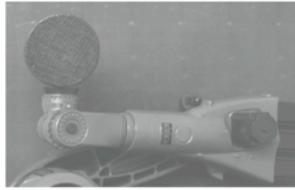


$\nu = 3$

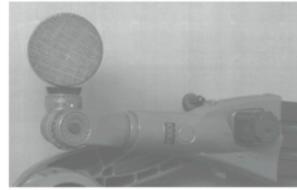
Beispiel 8.37: Dekorrelation multispektraler Bilder



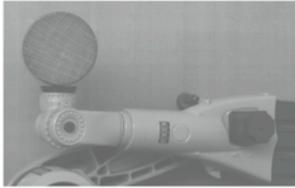
(b) 400 nm



(c) 450 nm



(d) 500 nm



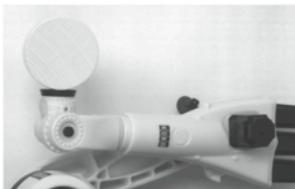
(e) 550 nm



(f) 600 nm



(g) 650 nm



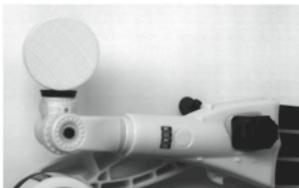
(h) 700 nm



(i) 800 nm



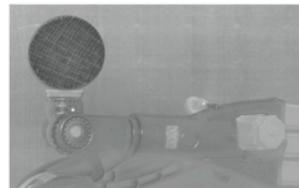
(j) 850 nm



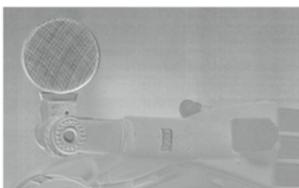
(a) $\lambda_1 = 20829$



(b) $\lambda_2 = 285$



(c) $\lambda_3 = 143$



(d) $\lambda_4 = 42$



(e) $\lambda_5 = 35$



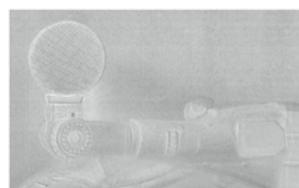
(f) $\lambda_6 = 14$



(g) $\lambda_7 = 11$



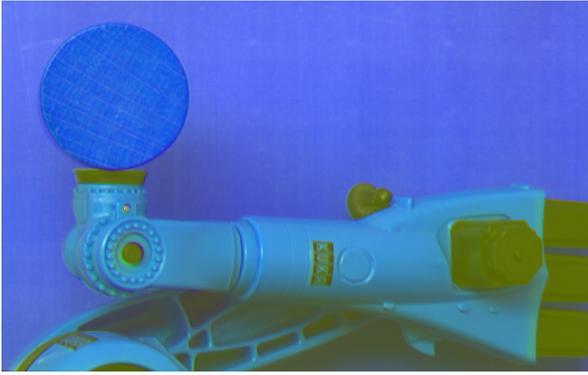
(h) $\lambda_8 = 8$



(i) $\lambda_9 = 3$

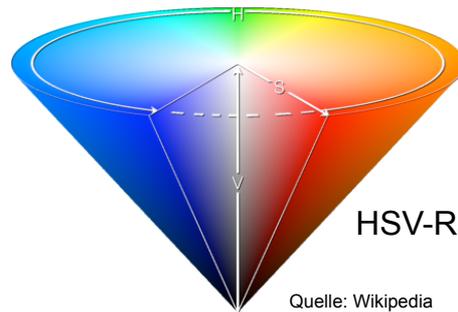
Komponenten der Karhunen-Loève-Transformierten mit Eigenwerten λ_i

Beispiel 8.38: Fusion multispektraler Bilder



Die ersten 3 KLT-Komponenten

- als RGB-Bild interpretiert (o. li.)
- als HSV-Bild interpretiert (u. li.)



HSV-Raum

Quelle: Wikipedia